Материали
за сем. упражнения (*задачи*)
по ММФ-2

Тема: Специални функции
🕮 Теоретичен минимум:

❖ **<u>Ойлеров интеграл от втори род</u>** $\boxed{\Gamma(z)}$: функция на комплексна променлива z при $\operatorname{Re} z > 0$, която се дефинира с интеграла

(1) $$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt .$$

С интегриране по части лесно се получава свойството

(2) $$\Gamma(z+1) = z.\Gamma(z),$$

от което произтича следният резултат: ако $z = n$, където n - цяло число, то

(3) $$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n.(n-1)\Gamma(n-1) = n.(n-1).(n-2).....1.\Gamma(1) = n!$$

Последното равенство показва, че на $\Gamma(z)$ може да се гледа като на едно обобщение на факториела в комплексната област.

Установява се, че:

(5) $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$ и (6) $$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5......(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} .$$

За Ойлеров интеграл от втори род са в сила т.нар. **формули за допълването**:

(7) $$\Gamma(z).\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z.\sin \pi z},$$ и (8) $$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z} .$$

Ойлеров интеграл от втори род има асимптотично представяне, което го изразява достатъчно точно при големи реални положителни стойности на аргумента (т.е. $z = x >> 1$)

(9) $$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x} .$$

Това представяне е известно като **формула на Стирлинг**.

❖ **<u>Ойлеров интеграл от първи род</u>** $\boxed{B(p,q)}$**:** за стойности на p и q с положителни реални части (т.е. $\operatorname{Re} p > 0$ и $\operatorname{Re} q > 0$) тя се дефинира посредством определения интеграл

(10) $$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1}\, dt ,$$

и притежава следните по-важни свойства:

(11) $$B(q,p) = B(p,q),$$

(12) $$B(p,q) = \frac{q-1}{p} B(p+1, q-1),$$ или още $$B(p,q) = \frac{p-1}{q} B(p-1, q+1) .$$

Съществува релация, свързваща B-функция и Γ-функция, а именно

(13) $$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} .$$

❖ **Полиноми на Ермит** $\boxed{H_n(z)}$: полиноми, представляващи решения на дихеренциалното уравнение

(14) $$\frac{d^2 H_n(z)}{dz^2} - 2z\frac{dH_n(z)}{dz} + 2n H_n(z) = 0$$

при **цели стойности** на n.

Производяща функция на полиномите на Ермит

(15) $$g(z,t) = e^{-t^2+2zt}.$$

Полиномите на Ермит могат да бъдат получени от тяхната производяща функция като коефициенти в развитието й в ред

(16) $$g(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z)\frac{t^n}{n!},$$

като за $H_n(z)$ е в сила представянето чрез **интеграл на Шлефли**

(17) $$H_n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{e^{-t^2+2zt}}{t^{n+1}}\,dt,$$

където L е директно ориентирана затворена крива, съдържаща точката $u = z$. Решаването на (17) с теорема за резидуумите дава диференциално представяне за полиномите на Ермит, носещо названието **формула на Родриг**:

(18) $$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}.$$

Полиномите на Ермит образуват ортонормирана система от функции с тегло (*теглова функция*) e^{-z^2}, т.е. в сила е

(19) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2} H_m(z) H_n(z)\,dz = 2^n n!\sqrt{\pi}\,\delta_{mn}.$$

Полиномите на Ермит намират приложение при решаването на квантовомеханичната задача за хармоничен осцилатор.

❖ **Полиноми на Лежандър** $\boxed{P_n(z)}$: **п**олиноми, представляващи решения на уравнението (*уравнение на Лежандър*)

(20) $$\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{dP_n(z)}{dz}\right) + n(n+1)P_n(z) = 0.$$

Производяща функция на полиномите на Лежандър

(21) $$g(z,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}.$$

Полиномите на Лежандър могат да бъдат получени от тяхната производяща функция като коефициенти в развитието й в ред на Лоран

(22) $$g(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\,t^n,$$

а представянето им чрез **интеграл на Шлефли** е

(23) $$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i\, 2^n}\oint_K \frac{(u^2-1)^n}{(u-z)^{n+1}}\,du,$$

където K е директно ориентирана затворена крива в равнината на комплексната променлива u около точката $u = z$.

Диференциално представяне за полиномите на Лежандър с **формула на Родриг**

(24) $$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n .$$

Ортогоналност на полиномите на Лежандър

(25) $$\int_{-1}^{+1} P_m(z)\, P_n(z)\, dz = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} .$$

❖ **<u>Полиноми на Лагер</u>** $\boxed{L_n(z)}$: полиноми, представляващи решения на диференциалното уравнение

(26) $$z \frac{d^2 L_n(z)}{dz^2} + (1-z) \frac{dL_n(z)}{dz} + nL_n(z) = 0 .$$

Производяща функция на полиномите на Лагер

(27) $$g(z,t) = \frac{1}{1-t} . e^{-z\frac{t}{1-t}} .$$

Полиномите на Лагер могат да бъдат получени от тяхната производяща функция като коефициенти в развитието ѝ в ред на Лоран

(28) $$g(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(z)\, t^n ,$$

като за $L_n(z)$ е в сила представянето чрез **интеграл на Шлефли**

(29) $$L_n(z) = \frac{e^z}{2\pi i} \oint_L \frac{u^n e^{-u}}{(u-z)^{n+1}} du ,$$

където L е директно ориентирана затворена крива, съдържаща точката $u = z$.

Диференциално представяне на полиномите на Лагер с **формула на Родриг**

(30) $$L_n(z) = \frac{1}{n!} e^z \frac{d^n}{dz^n} (z^n e^{-z}) .$$

Полиномите на Лагер образуват ортонормирана система от функции в интервала $(0,\infty)$ с тегло (*теглова функция*), равно на e^{-z}, т.е. в сила е следното условие за ортогоналност:

(31) $$\int_0^{\infty} e^{-z} L_m(z)\, L_n(z)\, dz = \delta_{mn} .$$

Може би най-важното си приложение полиномите на Лагер намират при решаването на **радиалното уравнение на Шрьодингер за водородния атом**.

❖ **<u>Сферични функции на Лаплас</u>** $\boxed{Y_{lm}(\theta,\varphi)}$: до идеята за въвеждането им се достига най-естествено при решаването на задачата за намиране на собствените функции на оператора на квадрата на момента на импулса, свеждаща се до уравнението

(32) $$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0 .$$

Едно от уравненията, до което се достига при решаване на (32) по метода на разделяне на променливите, е т.нар. **присъединено уравнение на Лежандър**

$$(33) \quad \frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{d\,P_n^m(z)}{dz}\right)+\left[n(n-1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]P_n^m(z)=0 \ ,$$

където $n=0,1,2,\ldots,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.,n$.

Неговите решения се дават с функциите (**присъединени функции на Лежандър**)

$$(34) \quad P_n^m(z)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^m}{d\,z^m}P_n(z),$$

където $P_n(z)$ са **полиноми на Лежандър**. Ако се положи $z=\cos\theta$, то присъединените функции на Лежандър могат да бъдат записани още

$$(35) \quad P_n^m(\cos\theta)=(1-\cos^2\theta)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^m}{(d\cos\theta)^m}P_n(\cos\theta)=\sin^m\theta\,\frac{d^m}{(d\cos\theta)^m}P_n(\cos\theta)\,.$$

Присъединените функции на Лежандър са ортонормирани

$$(36) \quad \int_{-1}^{+1}P_n^m(z)\,P_{n'}^m(z)\,dz=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'}$$

Функцията, явяваща се решение на ДУ (32), се представя чрез присъединените функции на Лежандър във вида

$$(37) \quad Y(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}\equiv N_{lm}\,P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}\,,$$

където $N_{lm}=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$ е нормировъчен множител.

Дефинирани по този начин, сферичните функции на Лаплас $Y(\theta,\varphi)$ образуват пълна ортонормирана система, т.е.

$$(38) \quad \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}Y_{l_1\,m_1}^{*}(\theta,\varphi)Y_{l_2\,m_2}(\theta,\varphi)\sin\theta\;d\theta\,d\varphi=\delta_{m_1m_2}\delta_{n_1n_2}\,.$$

От гледна точка на квантовата механика сферичните функции на Лаплас се оказват собствени функции на оператора на квадрата на момента на импулса на микрочастица(и).

❖ Цилиндрични функции. Функции на Бесел, Нойман и Ханкел

До необходимостта от въвеждането на този клас специални функции се достига при решаването на уравнението на Лаплас $\Delta u=0$ в цилиндрични координати.

Функциите, които удовлетворяват **уравнението на Бесел**

$$(39) \quad z^2\,\frac{d^2\,W(z)}{d\,z^2}+z\,\frac{d\,W(z)}{d\,z}+(z^2-\lambda^2)\,W(z)=0$$

се наричат **цилиндрични функции**. Уравнението на Бесел е **линейно хомогенно ОДУ от втори ред с непостоянни коефициенти**, и за намиране на неговото **общо решение** се търси **двойка линейно независими частни решения**, представляващи фундаментална система решения на уравнението на Бесел.

Функции на Бесел, Нойман и Ханкел:

Една (*първа*) двойка линейно независими частни решения на (39) се дава с **функциите на Ханкел** $H_\lambda^k(z)$.

Друга (*втора*) двойка линейно независими частни решения на (39) се дава с **функциите на Бесел** $J_\lambda(z)$ и с **функциите на Нойман** $Y_\lambda(z)$, т.е. **общо решение** на (39) се дава с

$$W(z) = C_1 J_\lambda(z) + C_2 Y_\lambda(z).$$

Функциите на Бесел $J_\lambda(z)$ се дефинират с безкрайния ред

$$(40) \quad J_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Pi(k).\Pi(k+\lambda)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k},$$

където $\Pi(z) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt$ при $\operatorname{Re} z > -1$ е **ойлеров интеграл от втори род**.

При <u>целочислени стойности</u> на $\lambda = n$ е изпълнено $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$.

Функциите на Нойман, наричани понякога **функции на Бесел от втори род**, са свързани с функциите на Бесел (*от първи род*) с представянето

$$(41) \quad Y_\lambda(z) = \frac{\cos\lambda\pi\, J_\lambda(z) - J_{-\lambda}(z)}{\sin\lambda\pi}.$$

Функциите на Бесел освен чрез диференциалното уравнение (39), което удовлетворяват, могат да бъдат въведени и посредством тяхна производяща функция. За функциите на Бесел от първи род тази функция има вида

$$(42) \quad g(z,t) = \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right].$$

Функцията на Бесел от първи порядък има редовото представяне

$$(43) \quad J_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!.(n+s)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s-n}.$$

За нея са в сила следните **рекурентни съотношения**:

$$(44) \quad J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z),$$

$$(45) \quad J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n^/(z), \quad \text{или още} \quad J_n^/(z) = \frac{J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)}{2},$$

$$(46) \quad z^n J_{n-1}(z) = n\frac{d}{dz}\left(z^n J_n(z)\right),$$

$$(47) \quad -z^{-n} J_{n-1}(z) = \frac{d}{dz}\left(z^{-n} J_n(z)\right).$$

Много полезно е интегралното представяне на функцията на Бесел, имащо вида

$$(48) \quad J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - z\sin\theta)\, d\theta \qquad \text{- } \textit{интеграл на Бесел}.$$

Производящата функция (42) определя само функциите на Бесел $J_\lambda(z)$ от цял ред (*т.е. с цял индекс* $\lambda = \pm n$). Функциите на Бесел от полуцял ред $\lambda = \pm(n + \frac{1}{2})$ се въвеждат, като се положи

$$(49) \quad J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \qquad \text{и} \qquad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z,$$

след което, за намирането на останалите функции на Бесел с полуцял индекс $|\lambda| > \frac{1}{2}$ се използват рекурентните съотношения $J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z)$.

Отличителна черта на функциите на Бесел от полуцял ред е, че те се изразяват чрез елементарните функции $\sin z$, $\cos z$ и $\sqrt{z}$, и следователно те също са елементарни функции.

❖ **<u>Интегрална експонента</u>** $Ei\,x$ и **<u>интегрален логаритъм</u>** $li\,x$. **<u>Интегрален синус</u>** $si\,x$ и **<u>интегрален косинус</u>** $ci\,x$**:**

Тези функции се свързват със следните неопределени интеграли:

(50) $Ei\,x = \int \frac{e^x}{x} dx$; (51) $li\,x = \int \frac{dx}{\ln x}$;

(52) $si\,x = \int \frac{\sin x}{x} dx$; (53) $ci\,x = \int \frac{\cos x}{x} dx$.

Тези интеграли не могат да бъдат изразени чрез елементарни функции, затова се въвеждат с горните равенства като нови **трансцедентни функции**, които се наричат **специални**. Някои по-важни свойства на тези функции:

(54) $Ei\,x = \int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{d(e^x)}{\ln e^x} = \dots.\ \dots = li\,e^x$,

(55) $li\,x = \int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{1}{\ln x} \frac{x}{x} dx = \int \frac{x}{\ln x} \frac{1}{x} dx = \int \frac{e^{\ln x}}{\ln x} d(\ln x) = \dots = Ei(\ln x)$.

Понеже

$$Ei\ (ix) = \int \frac{e^{ix}}{x} dx = \int \frac{\cos x + i.\sin x}{x} dx = \int \frac{\cos x}{x} dx + i.\int \frac{\sin x}{x} dx \equiv ci\,(x) + i.si\,(x),$$

то

(56) $Ei\ (ix) = ci\,(x) + i.si\,(x)$**,**

което е напълно аналогично на известната формула на Ойлер $e^{ix} = \cos x + i.\sin x$.

✸ **<u>Задача</u>**: Да се докаже следното представяне за Γ-функция

(1) $\boxed{\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)\dots\dots(z+n)}}$ - *формула на Ойлер-Гаус*.

<u>Доказателство</u>:

Понеже (*по дефиниция за Неперово число*)

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad e^t = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n, \quad \text{а} \quad e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n,$$

то логично е, изхождайки от представянето $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$, да разгледаме следния интеграл $I(n)$, явяващ се <u>функция на горната си граница</u>

$$(2)\qquad I(n)=\int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt,$$

когото „започваме” да **интегрираме по части**, повтаряйки този начин на интегриране n**-пъти**:

$$I(n)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n d\left(\frac{t^z}{z}\right)= \text{ … \textit{по части № 1} … } =\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\left(\frac{t^z}{z}\right)\Bigg|_{t=0}^{n}-\int_0^n\left(\frac{t^z}{z}\right)d\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=$$

$$=\left[\left(1-\frac{n}{n}\right)^n\left(\frac{n^z}{z}\right)-\left(1-\frac{0}{n}\right)^n\left(\frac{0^z}{z}\right)\right]-\frac{n}{z}\int_0^n t^z\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{n}\right)dt=\frac{n}{z}\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^n t^z\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}dt=$$

$$=\frac{n}{z}\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}d\left(\frac{t^{z+1}}{z+1}\right)=\text{… \textit{по части № 2} … , \textit{и понеже} } \boxed{F(t)\Big|_{t=0}^{n}\equiv 0}\text{\textit{, ще изпускаме}}$$

тези <u>винаги равни на нула членове</u>, и ще пишем само интегралите ….. $=$

$$=-\frac{n}{z}\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^n\left(\frac{t^{z+1}}{z+1}\right)d\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}=-\frac{n}{z}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{n-1}{z+1}\int_0^n t^{z+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\left(-\frac{1}{n}\right)dt=$$

$$=\frac{n(n-1)}{z(z+1)}\left(\frac{1}{n^2}\right)\int_0^n t^{z+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}dt=\text{ \textit{по части №3} }=\frac{n(n-1)}{z(z+1)}\left(\frac{1}{n^2}\right)\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}d\left(\frac{t^{z+2}}{z+2}\right)=$$

$$=-\frac{n(n-1)}{z(z+1)}\left(\frac{1}{n^2}\right)\int_0^n\left(\frac{t^{z+2}}{z+2}\right)d\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}=\frac{n(n-1)(n-2)}{z(z+1)(z+2)}\left(\frac{1}{n^3}\right)\int_0^n t^{z+2}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-3}dt=\dots \text{ и т.н.}$$

Щом след 3-кратно интегриране по части получихме горния резултат, то очевидно можем да заключим по метода на индукцията, че след n-кратно интегриране по части следва да се получи

$$I(n)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-n+1)}{z(z+1)(z+2)....(z+n-1)}\left(\frac{1}{n^n}\right)\int_0^n t^{z+n-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^0 dt\equiv$$

$$\equiv\frac{n!}{z(z+1)(z+2)....(z+n-1)}\left(\frac{1}{n^n}\right)\int_0^n t^{z+n-1}dt=\frac{n!}{z(z+1)(z+2)....(z+n-1)}\left(\frac{1}{n^n}\right)\left[\frac{t^{z+n}}{z+n}\right]\Bigg|_{t=0}^{n}=$$

$$=\frac{n!}{z(z+1)(z+2)....(z+n-1)(z+n)}\left(\frac{1}{n^n}\right)n^{z+n}=\frac{n!}{z(z+1)(z+2)....(z+n-1)(z+n)}n^{z+n-n}=$$

$$=\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)....(z+n-1)(z+n)}.$$

И така, доказахме, че

$$(3)\qquad I(n)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)....(z+n-1)(z+n)}.$$

Но ако отчетем факта, че

$$\lim_{n\to\infty}I(n)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=\int_0^{n\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}t^{z-1}dt\equiv\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\equiv\Gamma(z),$$

то очевидно ще имаме

$$(4)\qquad \Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}I(n)=\text{ … \textit{от (5)} … }=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)....(z+n-1)(z+n)},$$

с което представянето (1) за гама-функция е доказано.

✸ **Задача:** Да се докаже следното представяне за Γ-функцията:

(1) $$\frac{1}{\Gamma(z)} = z.e^{C.z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right).e^{-\frac{z}{n}}\right],$$ или още

(2) $$\Gamma(z) = \frac{1}{z}.e^{-C.z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{z}{n}}}{\left(1+\frac{z}{n}\right)},$$ както и $$\Gamma(z) = \frac{1}{z}.\frac{e^{-C.z}}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}}$$

където величината

(3) $$C = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}5772156649$$

е т.нар. константа на Ойлер-Маскерони.

Доказателство: нека най-напред докажем представянето (2). За целта ще изходим от доказаното вече в предна задача представяне за Γ-функцията

(4) $$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2).....(z+n)},$$

По-удобно е (4) да се изрази чрез безкрайно произведение. За целта се прави следното:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2).....(z+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{z\frac{(z+1)}{1}\frac{(z+2)}{2}.....\frac{(z+n)}{n}} =$$

$$\frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right).....\left(1+\frac{z}{n}\right)} = \frac{1}{z}\frac{n^z}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)},$$ т.е.

(5) $$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\frac{n^z}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)}.$$

Така за да докажем представянето (2), ще използваме (5), записано (*за удобство*) относно реципрочната стойност на $\Gamma(z)$, а именно

(6) $$\frac{1}{\Gamma(z)} = z.\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right).n^{-z}.$$

Ако използваме известното представяне на степенна функция чрез експоненциална функция, т.е. че $n^z = \left(e^{\ln n}\right)^z = e^{z.\ln n}$, то $n^{-z} = e^{-z.\ln n}$, и следователно ще имаме

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z.\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right).n^{-z} = z.\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right).e^{-z.\ln n} = \lim_{n\to\infty} z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)....\left(1+\frac{z}{n}\right).e^{-z.\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(e^{-z}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(e^{-\frac{z}{2}}\right)....\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(e^{-\frac{z}{n}}\right).\left\{\left(e^{z}\right)\left(e^{\frac{z}{2}}\right).......\left(e^{\frac{z}{n}}\right)\right\}.e^{-z.\ln n} =$$

……. в горния запис всеки член $\left(1+\frac{z}{k}\right)$ *е умножен с* $\left(e^{-\frac{z}{k}}\right)$ *за* $k = 1,2,.....$*, и накрая, за да не се промени равенството, е добавено произведението* $\left\{\left(e^{z}\right)\left(e^{\frac{z}{2}}\right).......\left(e^{\frac{z}{n}}\right)\right\}$ ……..

$$\ldots\ldots = \lim_{n\to\infty} z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(e^{-z}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(e^{-\frac{z}{2}}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(e^{-\frac{z}{n}}\right).e^{z.\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(e^{-z}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(e^{-\frac{z}{2}}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(e^{-\frac{z}{n}}\right).\lim_{n\to\infty}\left\{e^{z.\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}\right\} =$$

$$= z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(e^{-\frac{z}{n}}\right).\left\{e^{z.\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}\right\} = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(e^{-\frac{z}{n}}\right).\left\{e^{z.\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\ln n\right)}\right\}.$$

т.е.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z.e^{C.z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right).e^{-\frac{z}{n}}\right], \text{ или още } \quad \Gamma(z) = \frac{1}{z}.e^{-C.z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{z}{n}}}{\left(1+\frac{z}{n}\right)},$$

с което представянето (2) е доказано.

✸ **Задача:** Да се докаже, че:

$$(1) \qquad \int_0^{\pi/2}\cos^a\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^a\theta\, d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}, \qquad \operatorname{Re} a > -1.$$

<u>Доказателство</u>: нека положим

$$(2) \qquad \cos^2\theta = t,$$

следователно $\cos\theta = \sqrt{t}$, $\quad \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-t}$, $\quad$ откъдето изразяваме

$\cos^a\theta = t^{\frac{a}{2}}$, $\quad \sin^a\theta = (1-t)^{\frac{a}{2}}$, $\qquad$ и още $\qquad$ (*от* $\cos\theta = \sqrt{t}$)

$-\sin\theta\, d\theta = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{t}}dt$, $\qquad$ т.е. $\qquad d\theta = \dfrac{1}{-\sin\theta}\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt = -\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$.

При това за $\theta = 0 \to t = 1$, а за $\theta = \dfrac{\pi}{2} \to t = 0$, така че за първия от двата интеграла ще имаме

$$(3) \qquad \int_0^{\pi/2}\cos^a\theta\, d\theta = \int_1^0 t^{\frac{a}{2}}\left(-\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\right) = -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{\frac{a}{2}}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{a-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\left[\frac{a-1}{2}+1\right]-1}(1-t)^{\left[-\frac{1}{2}+1\right]-1}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\left(\frac{a+1}{2}\right)-1}(1-t)^{\left(\frac{1}{2}\right)-1}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

където е използвано, че по дефиниция за $\operatorname{Re} p > 0$ и $\operatorname{Re} q > 0$ функцията, зададена с определения интеграл

$$(4) \qquad B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,$$

е „**бета**"-функция, наричана още **Ойлеров интеграл от първи род**. $B(p,q)$ е свързана с $\Gamma(z)$-функцията със съотношението

$$(5) \qquad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

С помощта на (5) можем да запишем, че

$$\int_0^{\pi/2}\cos^a\theta\,d\theta=\frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\frac{a}{2}.\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{a}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)},$$

с което частта от твърдението (1), касаеща $\int_0^{\pi/2}\cos^a\theta\,d\theta$, е доказана. Работейки по абсолютно същия начин, се доказва и твърдението за $\int_0^{\pi/2}\sin^a\theta\,d\theta$, т.е. че

$$\int_0^{\pi/2}\sin^a\theta\,d\theta=\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\ldots\ldots\ldots=\frac{\sqrt{\pi}}{a}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

✷ **Задача:** Да се докаже, че за Ойлеровата функция (*интеграл*) от първи род е в сила:

(1) $$B(x,x).B\left(x+\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2^{4x-1}.x}.$$

Доказателство: за $\operatorname{Re}p>0$ и $\operatorname{Re}q>0$ „**бета**"-функцията се задава с определения интеграл

(2) $$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt.$$

Функцията $B(p,q)$ е свързана с $\Gamma(z)$-функцията посредством съотношението

(3) $$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Според определението (2)

$$B(x,x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt=\int_0^1\left[t(1-t)\right]^{x-1}dt=\int_0^1\left[t-t^2\right]^{x-1}dt=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}-2.\frac{1}{2}t+t^2\right)\right]^{x-1}dt=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}-2.\frac{1}{2}t+t^2\right)\right]^{x-1}dt=\int_0^1\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right]^{x-1}dt=2\int_0^{1/2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right]^{x-1}dt\cdot$$

Нека в така полученото дотук представяне

$$B(x,x)=2\int_0^{1/2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right]^{x-1}dt$$

положим $\frac{1}{2}-t=\frac{\sqrt{u}}{2}$, т.е. $t=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{u}}{2}$, $\Rightarrow$ $dt=-\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{u}}du$. При това полагане интеграционните граници се сменят както следва: при $t=0\Rightarrow u=1$, а при $t=\frac{1}{2}\Rightarrow u=0$. Тогава

$$B(x,x)=2\int_0^{1/2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right]^{x-1}dt=2\int_1^0\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{u}}{2}\right)^2\right]^{x-1}\left(-\frac{du}{4\sqrt{u}}\right)=-\frac{1}{2}\int_1^0\left[\frac{1}{4}-\frac{u}{4}\right]^{x-1}u^{-\frac{1}{2}}du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{(1-u)}{2^2}\right]^{x-1}u^{\frac{1}{2}-1}du=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-u)^{x-1}}{2^{2(x-1)}}u^{\frac{1}{2}-1}du=\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}-1}(1-u)^{x-1}du=\frac{1}{2^{2x-1}}B\left(\frac{1}{2},x\right),\text{ т.е.}$$

(4) $\quad B(x,x)=\dfrac{1}{2^{2x-1}}B\left(\dfrac{1}{2},x\right).$

За пресмятането на $B\left(x+\dfrac{1}{2},x+\dfrac{1}{2}\right)$ имаме две възможности:

(a) да работим по горния начин, повтаряйки изчисленията отново;

($б$) или да приложим (4), заменяйки (*формално*) $x\to\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

Ако приложим ($б$), ще имаме

(5) $\quad B\left(x+\dfrac{1}{2},x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^{2\left(x+\frac{1}{2}\right)-1}}B\left(\dfrac{1}{2},x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^{2x}}B\left(\dfrac{1}{2},x+\dfrac{1}{2}\right).$

Сега следва да умножим (4) и (5)

$$B(x,x).B\left(x+\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2x-1}}B\left(\frac{1}{2},x\right)\times\frac{1}{2^{2x}}B\left(\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{4x-1}}B\left(\frac{1}{2},x\right)B\left(\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{4x-1}}B\left(\frac{1}{2},x\right)B\left(\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{4x-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)}.\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2^{4x-1}}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(x)\sqrt{\pi}}{\Gamma(x+1)}=$$

$$=\frac{\pi}{2^{4x-1}}\frac{\Gamma(x)}{x.\Gamma(x)}=\frac{\pi}{2^{4x-1}.x},$$

с което доказателството е завършено.

✸ **Задача:** Да се докаже следното рекурентно съотношение за полиномите на Лежандър:

(1) $\quad (n+1).P_{n+1}(z)=(2n+1)\,z\,P_n(z)-n.P_{n-1}(z)$, при $n=1,2,3,\ldots$

Доказателство:

То се получава след диференциране на производящата функция $g(z,t)$ по аргумента й t

(2) $\quad \dfrac{\partial}{\partial t}g(z,t)=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}\right)=\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\left(1-2zt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=-\dfrac{1}{2}\left(1-2zt+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2z+2t)$,

т.е. (3) $\quad \dfrac{\partial}{\partial t}g(z,t)=\dfrac{z-t}{(1-2zt+t^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Нека сега диференцираме $g(z,t)$ и от представянето й в ред:

(4) $\quad \dfrac{\partial}{\partial t}g(z,t)=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}n.P_n(z)t^{n-1}$.

От сравняването на производните (3) и (4) следва

(5) $$\frac{z-t}{(1-2zt+t^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(z)t^{n-1},$$

или ако умножим двете страни на това равенство с $(1-2zt+t^2)$, ще имаме

(6) $$\frac{z-t}{(1-2zt+t^2)^{\frac{1}{2}}}=(1-2zt+t^2).\sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(z)t^{n-1}$$

Но $\dfrac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}\equiv\dfrac{1}{(1-2zt+t^2)^{\frac{1}{2}}}=g(z,t)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}.P_n(z)t^n$, следователно

$(z-t).\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n=(1-2zt+t^2).\sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(z)t^{n-1}$, или

$z\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n-t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n=\sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(z)t^{n-1}-2zt\sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(z)t^{n-1}+t^2.\sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(z)t^{n-1}$, т.е.

(7) $$\sum_{n=0}^{\infty} z\,P_n(z)t^n-\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(z)t^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} 2z\,n.P_n(z)t^n+\sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(z)t^{n+1}.$$

Нека „преномерираме” сумационните индекси в тези безкрайни суми по такъв начин, че всяка от сумите да съдържа представяне чрез една и съща степен на t, напр. $\boxed{t^n}$. Очевидно трябва да коригираме по този начин следните суми:

- ☞ $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^{n+1}$, в която заместваме $n\to(n-1)$, и $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^{n+1}\to\sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(z)t^n$;
- ☞ $\sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(z)t^{n-1}$, в която заместваме $n\to(n+1)$, и $\sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(z)t^{n-1}\to\sum_{n=0}^{\infty}(n+1).P_{n+1}(z)t^n$;
- ☞ $\sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(z)t^{n+1}$, в която заместваме $n\to(n-1|$, и $\sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(z)t^{n+1}\to\sum_{n=1}^{\infty}(n-1).P_{n-1}(z)t^n$.

Заместваме „преиндексираните” безкрайни редове в (7), и получаваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} z\,P_n(z)t^n-\sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(z)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1).P_{n+1}(z)t^n-\sum_{n=0}^{\infty} 2z\,n.P_n(z)t^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1).P_{n-1}(z)t^n.$$

Понеже $P_{-1}(z)\equiv 0$, то можем да запишем още всички суми от $n=0$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z\,P_n(z)t^n-\sum_{n=0}^{\infty} P_{n-1}(z)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1).P_{n+1}(z)t^n-\sum_{n=0}^{\infty} 2z\,n.P_n(z)t^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1).P_{n-1}(z)t^n,$$

откъдето следва да бъде изпълнено равенството

$z\,P_n(z)-P_{n-1}(z)=(n+1).P_{n+1}(z)-2z\,n.P_n(z)+(n-1).P_{n-1}(z)$, т.е.

(8) $(n+1).P_{n+1}(z)=(2n+1)\,z\,P_n(z)-n.P_{n-1}(z)$, при $n=1,2,3,\dots$,

с което рекурентното съотношение за полиномите на Лежандър е доказано.

✸ **Задача:** Да се докаже следното рекурентно съотношение за полиномите на Лежандър:

(1) $P_n(z)=P_{n+1}^{/}(z)-2z\,P_n^{/}(z)+P_{n-1}^{/}(z)$, при $n=1,2,3,\dots.$

Доказателство:

То се получава след диференциране на производящата функция $g(z,t)$ по другия й аргумент - z. Нека отново най-напред диференцираме „директно” $g(z,t)$

(2) $$\frac{\partial}{\partial z}g(z,t)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1-2zt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=-\frac{1}{2}\left(1-2zt+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2t),$$

т.е. (3) $$\frac{\partial}{\partial z} g(z,t) = \frac{t}{(1-2zt+t^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Нека сега диференцираме по z и $g(z,t)$ от представянето й в ред:

(4) $$\frac{\partial}{\partial z} g(z,t) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^n .$$

От сравняването на производните (3) и (4) следва

(5) $$\frac{t}{(1-2zt+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^n .$$

Ако отново умножим двете страни на това равенство с $(1-2zt+t^2)$, ще имаме

(6) $$\frac{t}{(1-2zt+t^2)^{\frac{1}{2}}} = (1-2zt+t^2).\sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^n .$$

Но $\dfrac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} \equiv \dfrac{1}{(1-2zt+t^2)^{\frac{1}{2}}} = g(z,t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} .P_n(z) t^n$, следователно ще имаме

$$t.\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n = (1-2zt+t^2).\sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^n \text{ , или}$$

$$t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^n - 2zt\sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^n + t^2.\sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^n \text{ , т.е.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2z P_n^/(z) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^{n+2} .$$

Нека отново „преномерираме” сумационните индекси в тези безкрайни суми по такъв начин, че всяка от сумите да съдържа една и съща степен на t, напр. $\boxed{t^{n+1}}$. Очевидно трябва да коригираме по този начин следните суми:

☞ $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^n$, в която заместваме $n \to (n+1)$, и $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^n \to \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}^/(z) t^{n+1}$;

☞ $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^{n+2}$, в която заместваме $n \to (n-1)$, и $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^/(z) t^{n+2} \to \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}^/(z) t^{n+1}$.

Заместваме „преиндексираните” безкрайни редове в последното равенство, и получаваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}^/(z) t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2z P_n^/(z) t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}^/(z) t^{n+1} .$$

Понеже $P_{-1}(z) \equiv 0$, то можем да запишем още

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}^/(z) t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2z P_n^/(z) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n-1}^/(z) t^{n+1}$$

откъдето следва да бъде изпълнено равенството

(7) $$P_n(z) = P_{n+1}^/(z) - 2z P_n^/(z) + P_{n-1}^/(z), \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

с което и това рекурентно съотношение за полиномите на Лежандър е доказано.

✷ **Задача:** Да се докаже следното рекурентно съотношение за функциите на Бесел от първи род $J_n(z)$:

(1) $$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) .$$

Доказателство: то се получава след диференциране по „t" на производящата функция на функциите на Бесел от първи род $g(z,t)$. Започваме най-напред с:

(2) $$\frac{\partial}{\partial t}g(z,t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right] = \frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right] = \frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)g(z,t) =$$
$$= \frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(z)t^n = \frac{z}{2}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}J_n(z)t^n + \sum_{-\infty}^{+\infty}J_n(z)t^{n-2}\right).$$

Ако в първата от сумите преномерираме $n \to (n-1)$, а във втората $(n-2) \to (n-1)$, т.е. заменим $n \to (n+1)$, получаваме

(3) $$\frac{\partial}{\partial t}g(z,t) = \frac{z}{2}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}J_{n-1}(z)t^{n-1} + \sum_{-\infty}^{+\infty}J_{n+1}(z)t^{n-1}\right)$$

Диференцираме по „t" и редовото развитие на производящата функция $g(z,t)$

(4) $$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{-\infty}^{+\infty}J_n(z)t^n = \sum_{-\infty}^{+\infty}nJ_n(z)t^{n-1}.$$

От приравняването на коефициентите пред t^{n-1} в двете производни (3) и (4), получаваме търсеното рекурентно съотношение между функциите на Бесел от първи род

(5) $$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}J_n(z).$$

✸ **Задача:** Да се докаже следното рекурентно съотношение за функциите на Бесел от първи род $J_n(z)$:

(1) $$J_n^{/}(z) = \frac{J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)}{2}.$$

Доказателство: и то се получава след диференциране на производящата функция $g(z,t)$, но този път по „z":

(2) $$\frac{\partial}{\partial z}g(z,t) \equiv \frac{\partial}{\partial z}\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)g(z,t) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(z)t^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}J_n(z)t^{n+1} - \sum_{-\infty}^{+\infty}J_n(z)t^{n-1}\right).$$

Ако в първата от сумите преномерираме $(n+1) \to n$, т.е. заменим $n \to (n-1)$, а във втората $(n-1) \to n$, т.е. $n \to (n+1)$, получаваме

(3) $$\frac{\partial}{\partial t}g(z,t) = \frac{z}{2}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}J_{n-1}(z)t^n - \sum_{-\infty}^{+\infty}J_{n+1}(z)t^n\right).$$

Диференцираме по „z" и редовото развитие на производящата функция $g(z,t)$

(4) $$\frac{\partial}{\partial z}\sum_{-\infty}^{+\infty}J_n(z)t^n = \sum_{-\infty}^{+\infty}J_n^{/}(z)t^n.$$

От приравняването на коефициентите пред t^n в двете производни (3) и (4), получаваме търсеното рекурентно съотношение между функциите на Бесел от първи род

(5) $J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n^{/}(z)$, или още $J_n^{/}(z) = \dfrac{J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)}{2}$.

✸ **Задача:** Да се докажат следните рекурентни съотношения за функциите на Бесел от първи род $J_n(z)$:

(1) $z^n J_{n-1}(z) = \frac{d}{dz}\left(z^n J_n(z)\right)$ и (2) $-z^{-n} J_{n-1}(z) = \frac{d}{dz}\left(z^{-n} J_n(z)\right)$.

<u>**Доказателство**</u>:

Ако **съберем почленно** двете рекурентни съотношения, доказани в предните две задачи, а именно

(3) $J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z)$ и (4) $J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n^{/}(z)$,

получаваме

$$2J_{n-1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) + 2J_n^{/}(z), \text{ т.е.}$$

(5) $J_{n-1}(z) = \frac{n}{z} J_n(z) + J_n^{/}(z)$.

Следва умножаване на двете страни на (5) с z^n, след което получаваме

(6) $z^n J_{n-1}(z) = n z^{n+1} J_n(z) + z^n J_n^{/}(z) \equiv \frac{d}{dz}\left(z^n J_n(z)\right)$, к.т.д.

А ако **извадим почленно** двете рекурентни съотношения (3) и (4), получаваме

(7) $2J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - 2J_n^{/}(z)$, т.е.

(8) $J_{n+1}(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J_n^{/}(z)$.

Ако умножим двете страни на (8) с $(-z^{-n})$, получаваме

(9) $-z^{-n} J_{n-1}(z) = -n z^{-n+1} J_n(z) + z^{-n} J_n^{/}(z) \equiv \frac{d}{dz}\left(z^{-n} J_n(z)\right)$, к.т.д.

✸ **Задача:** Да се докаже, че **интегралната показателна функция** $Ei\,x = \int \frac{e^x}{x} dx$ има следното редово представяне:

(1) $Ei\,x = C + \ln x + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \ldots \equiv C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k.k!}$

<u>**Доказателство**</u>: Прилагайки редовото развитие на експоненциалната функция

(2) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

в $Ei\,x = \int \frac{e^x}{x} dx$**,** получаваме за интегралната показателна функция редовото представяне

(3) $Ei\,x = \int \frac{1}{x} e^x dx = \int \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right)dx =$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int\left(\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right)dx = \ln x + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \ldots + C,$$

откъдето следва, че представянето чрез безкраен ред на тази функция действително има вида

(4) $Ei\,x = C + \ln x + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \ldots \equiv C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k.k!}$.

✸ **Задача:** Да се докаже, че **интегралната логаритмична функция** $li\,x = \int \frac{dx}{\ln x}$ има следното редово представяне:

$$(1)\qquad li\,x = C + \ln(\ln x) + \frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2.2!} + \frac{(\ln x)^3}{3.3!} + \ldots . \equiv C + \ln(\ln x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{k.k!}\ .$$

Доказателство: за целта прилагаме субституцията $\ln x = t$, т.е. $x = e^t$, при което за $li\,x$ получаваме

$$(2)\qquad li\,x = \int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{d(e^t)}{t} = \int \frac{e^t}{t}dt = \int \frac{1}{t}(e^t)dt = \int \frac{1}{t}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\Big)dt = \int \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots .\right)dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1!} + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \ldots .\right)dt = \int \frac{1}{t}dt + \int \left(\frac{1}{1!} + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \ldots .\right)dt = \ln t + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2.2!} + \frac{t^3}{3.3!} + \ldots . + C$$

Но тъй като $t = \ln x$, то

$$(3)\qquad li\,x = \ln t + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2.2!} + \frac{t^3}{3.3!} + \ldots . + C = C + \ln(\ln x) + \frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2.2!} + \frac{(\ln x)^3}{3.3!} + \ldots . ,\ \text{т.е.}$$

$$(4)\qquad li\,x = C + \ln(\ln x) + \frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2.2!} + \frac{(\ln x)^3}{3.3!} + \ldots . \equiv C + \ln(\ln x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{k.k!}\ .$$